

# 建立正弦气隙磁场的电机绕组优化设计

季小尹 米春亭

**【摘要】** 本文提出了以单相异步电动机定子各槽中的电枢绕组导线数为设计变量、工作气隙复杂的高次谐波磁场为目标函数,把有限元法、快速傅里叶变换及优化技术结合在一起,使电动机工作气隙磁场接近正弦分布的方法。并以具有异形槽的单相异步电动机为例进行优化改进设计,有效地抑制了高次谐波磁场。

**【关键词】** 正弦气隙磁场 电机绕组 优化设计 异步电动机

## 一、前言

在设计异步电动机过程中,通常进行了大量的简化,假定外加在定子绕组的电压和绕组中流过的电流都是时间的正弦函数,往往还假定绕组磁势和所建立的气隙磁场在空间是按正弦规律分布,或者仅取其基波进行设计计算。实际上即使在电动机绕组中流过正弦电流,但在工作气隙磁场中将含有一系列复杂的高次谐波,其中包括:绕组磁势在空间非正弦分布引起的高次空间谐波、定转子铁心具有齿槽而产生的齿谐波、磁路饱和以及气隙磁导非均匀分布等多种因素引起的谐波,从而造成了工作气隙磁场波形的非正弦,这在传统的电机设计中是无法综合考虑的。

对异步电动机来说,它是一种基于工作气隙磁场与转子导体中感应的电流相互作用而产生电磁转矩的交流电机。如果在工作气隙中含有严重的高次谐波磁场,那么就会产

生对电机运行不利的附加转矩、附加损耗、振动和噪声。它们都是影响异步电动机性能的主要因素。

为了削弱或消除一些高次谐波磁场,定子绕组采用短矩和分布绕组、转子或定子采用斜槽及合理选择定转子槽的配合等方法来实现。但是,为了更进一步抑制高次谐波、削弱或消除一定的附加转矩,就得对定子绕组的每槽分配加以研究。本文直接从工作气隙磁场着手,对具有异形齿槽这样的气隙磁导不均匀分布的单相异步电动机进行电枢绕组分配的优化设计,使得工作气隙磁场尽可能地接近正弦分布,这是从非线性涡流场的分析出发,应用有限元法进行综合设计计算,从而具有较高的精度,并在此基础上结合快速傅里叶变换、优化技术,借助计算机实现电枢绕组分配的优化设计。尤其对异形槽、槽数多以及每槽中导线数的可调范围比较大时,这种优化设计接近正弦分布气隙磁场的方法更能显示出其独特的优越性。

## 二、电机绕组优化设计 数学模型及算法

### 1. 优化设计数学模型

应用非线性规划进行优化设计有两种基本算法,连续规划算法和离散规划算法。前者是指优化设计过程中设计变量是连续取值的,后者指设计变量离散取值的,连续规划

本文1992年5月27日收到。

· 优化设计 ·

算法是目前比较常用的算法,但应用这一算法对于工程实际问题,只有在求得连续最优解后,将变量调整到满足设计约束的离散值或整数值,即使调整后的解可行,也未必是最优解。

对于电机绕组分配的优化设计,其设计变量是绕组的每槽导体数,属离散变量,直接应用非线性离散规划算法是较为理想的,其优化设计数学模型可归结为

$$\begin{cases} \min f(X) & X \in R^n \\ \text{s.t. } G_j(X) \leq 0 & j=1,2,\dots,m \end{cases} \quad (1)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

式中  $X$ —— $n$  维设计向量,是离散变量的集合

$R^n$ —— $n$  维离散空间

$f(X)$ ——目标函数

本文是以单相异步电动机工作气隙高次谐波磁密的总有效值为目标函数

$$\min f(X) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{111} B_i^2}$$

式中  $B_i$ ——工作气隙磁密第  $i$  次谐波的幅值,取  $i=2, \dots, 111$  次谐波

以电枢主绕组各槽中的绕组导线数为离散设计变量

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_6)^T$$

式中  $x_1, x_2, \dots, x_6$  对应槽号见图1。

以铁心最大磁密、绕组电流密度、槽满率以及其它技术性能数据为函数约束

$$G_j(X) \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,8)$$

## 2. 非线性离散规划算法

在电机绕组分配的优化设计中,设计变量是各槽导线数,所以必须在一组整数离散值中选取,这些离散值需由设计人员预先规定,在程序中以离散值域矩阵  $Q$  形式出现。在离散值域阵中,每个设计变量占一行,每一行的各元素是该设计变量可取的离散值:

$$Q = \{q_{ij} \mid i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,p\}$$

$p$  为离散变量可取的离散值的最大个数,并

规定  $q_{i1} < q_{i2} < \dots < q_{ip}$ , 当某个离散变量可取值的个数不等于  $p$  时,可用 0 填补。

离散优化算法的步骤如下<sup>[1]</sup>:

(1) 给定一个可行初始离散点  $X_0$ , 它可由程序自带的随机法选择得到,也可用连续非线性规划的一个优化解作为初始点  $X_0$ ,  $k=0$ 。

(2) 计算离散点  $X_k$  的目标函数的近似梯度

$$\nabla f(X_k) = (\Delta f / \Delta x_1, \Delta f / \Delta x_2, \dots, \Delta f / \Delta x_n)^T \quad (2)$$

式中  $\Delta f / \Delta x_i = [f(x_i + \varepsilon_i h_i) - f(x_i)] / \varepsilon_i h_i$

$$i=1,2,\dots,n$$

$h_i$ ——第  $i$  个单位座标向量

$\varepsilon_i$ ——离散变量的增量

$$\begin{aligned} \text{令 } M &= \max \{ \Delta f / \Delta x_i \mid i=1,2,\dots,d,\dots,n \} \\ &= \Delta f / \Delta x_{dk} \end{aligned} \quad (3)$$

$\Delta x_{dk}$  为与  $M$  相对应的第  $d$  个离散变量  $x_{dk}$  的相邻两个离散值间的增量,  $x_{dk}$  实际上是离散值域  $Q$  阵中第  $d$  行的一个元素

$$\begin{aligned} Q_d &= \{q_{d1}, j=1,2,\dots,p\} \\ &= \{Q_d(j) \mid j=1,2,\dots,p\} \end{aligned}$$

则可构造搜索方向:

$$P_k \{p_i = (1/M) \cdot \Delta f / \Delta x_i \mid i=1,2,\dots,n\} \quad (4)$$

(3) 寻找新的离散点  $X_{k+1}$

$$X_{k+1} = X_k - \Delta X_k \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta X_k &= (\Delta x_{1k}, \Delta x_{2k}, \dots, \Delta x_{dk}, \dots, \Delta x_{nk})^T \\ &= |\Delta x_{dk}| \cdot P_k \end{aligned}$$

$$\text{而 } |\Delta x_{dk}| = |Q_d(j + \sum_{k=1}^r \alpha_k p_k) - Q_d(j)|$$

式中  $p_d$ ——搜索方向  $P_k$  沿座标  $x_{dk}$  上的分量

$$P = [p_1, p_2, \dots, p_d, \dots, p_n]^T$$

$\alpha_k$ ——由离散一维搜索法所确定的一个整数

(4) 如果  $f(X_{k+1}) < f(X_k)$  得到新点  $X_{k+1}$ , 置  $X_{k+1} \Rightarrow X_k$ , 返回, 否则转(5)。

(5) 在离散空间按某个规律进行搜索,

若  $f(X_{k+1}) < f(X_k)$ , 得到新点  $X_{k+1}$ , 置  $X_{k+1} \Rightarrow X_k$ , 返回(2), 否则转(6)。

(6) 在当前点  $X_k$  的离散单位邻域  $U_N(X_k)$  中进行查点, 若在该邻域中存在  $X_{k+1}$  于  $X_k$ , 则置  $X_{k+1} \Rightarrow X_k$ , 返回(2), 否则转(7)。

(7) 停机,  $X_k$  为离散最优值。

### 三、电机磁场的计算与分析

电机磁场的计算机辅助分析计算是电机绕组分配优化设计的基本组成部分, 优化设计中所出现的目标函数值及各个约束函数值都要通过电机磁场的分析计算而得到。本文在分析计算中, 是先经过平面二维非线性涡流场的计算, 获得工作气隙各单元的磁密值及其它函数约束值, 然后对前者进一步应用离散快速傅里叶变换分析, 获得工作气隙高次谐波磁密的总有效值, 即目标函数。

#### 1. 非线性涡流场的有限元方法<sup>[1,4]</sup>

一般的非线性涡流方程可归结为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial y} \right) = -\dot{J}_s + j\omega\sigma\dot{A} \quad (6)$$

式中  $\mu$ ——媒质磁导率

$\dot{A}$ ——复数矢量磁位

$\dot{J}_s$ ——定子外加电流密度

$\dot{J}_r$ ——转子导条区涡流密度

$\dot{J}_r = -j\omega\sigma\dot{A}$

$\sigma$ ——导条电阻率

在用有限元法分析单相异步电动机的磁场时, 还要考虑转子转动情况, 比一般的涡流方程复杂一些, 其转子导条中电流密度由两部分产生, 即

$$\dot{J}_r = -j\omega\sigma\dot{A} + \sigma v \times \text{rot} \dot{A}$$

式中  $v$ ——转子导条处圆周速度

在具体应用时可分为几个区来考虑<sup>[1]</sup>:

(1) 转子导条区方程为

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \dot{A} = -\dot{J}_r$$

$$= j\omega\sigma\dot{A} - \sigma v \times \text{rot} \dot{A} \quad (7)$$

(2) 定子绕组区基本方程为

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \dot{A} = -\dot{J}_s \quad (8)$$

(3) 气隙区方程为

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \dot{A} = 0 \quad (9)$$

(4) 定转子铁心区, 考虑材料的非线性, 方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial y} \right) = 0 \quad (10)$$

方程的普遍形式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial y} \right) = -\dot{J} \quad (11)$$

边界上  $\dot{A} |_{\Omega_1} = 0$

假定  $\psi(x, y)$  为在式(11)的算子范围内的任一连续函数, 它在所有边界处为零, 采用伽辽金法求解式(11), 得

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \dot{A}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy - \iint_{\Omega} \dot{J} \psi dx dy = 0 \quad (12)$$

有限元方法中的主要一环就是对此方程进行场域内的离散, 以此来建立有限元复代数方程组

$$[K][\dot{A}] = [\dot{R}] \quad (13)$$

令  $\dot{A} = A_R + jA_I$

使式(13)化成

$$\begin{bmatrix} K_R & -K_I \\ K_I & K_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_R \\ R_I \end{bmatrix} \quad (14)$$

这样就可以用N—R法求解了, 从而可以获得场域中各节点、各单元的数值解, 其中也包括工作气隙各单元的磁密值。

#### 2. 工作气隙磁场的傅里叶分析

前面通过有限元法分析计算得到的工作气隙磁场, 是对应气隙上各单元位置的一组离散磁密值  $\{f(n)\}$ , 所以, 必须用离散的傅里叶分析才能进行谐波分析。本文用的是离

· 优化设计 ·

散傅里叶分析中的离散付里叶变换，它既可以分析非周期性序列，也可以分析周期性序列<sup>[1]</sup>。设气隙磁密有限序列 $\{f(n)\}$ 的长度为 $N$ ，则对应的变换对为：

$$\begin{cases} F(k) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \\ \quad (0 \leq k \leq N-1) \\ f(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} \\ \quad (0 \leq n \leq N-1) \end{cases} \quad (15)$$

这里仅取能反映谐波频谱分布、有代表性的 $N$ 根谱线，如果在离散序列的一个周期中 $f(n)$ 有 $N$ 个样本磁密值，那么在变换的谐波频谱序列一个周期中 $F(k)$ 也有 $N$ 根谱线，即对应于气隙磁密的谐波幅值。

但是 $N$ 数值的大小往往影响 $F(k)$ 的分析，在有限元剖分计算中，一对极所对应的工作气隙的单元数不可能很多，以致谐波幅值 $F(k)$ 在反复中有重叠，即发生频域叠混，为了避免频域叠混，必须用插值的方法来增加气隙磁密的离散点数，然后用快速傅里叶变换（FFT）来提高其运算速度。

$$\text{令 } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

则式(15)可写成：

$$F(k) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{kn} \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (16)$$

如果取 $N = r_1 \cdot r_2 \cdots r_m$ 时，这种库利——图基(Cooley-Tukey)算法所需要的总运算次数为 $T = N(r_1 + r_2 + \cdots + r_m)$ 。

若使 $T$ 达最小值，应取 $r_1 = r_2 = \cdots = r_m$ ，即 $N = r^m$ ，这时所需要的总运算次数为 $T = Nm r$ ，本文中取 $r = 2$ ，并且综合 $W_N^{kn}$ 的对称性、周期性，对离散点的偶数点、奇数点，用二进制字位倒置的次序排列来提高快速。

## 四、实例计算

我们结合前面论述的分析方法，对具有异形槽的单相异步电动机的主绕组进行了建立正弦气隙磁场的电枢绕组优化改进设计计算。

该电机的横截面结构及主绕组局部图如图1所示，其中：外定子有36个槽（包括大小槽）、四个极，分主副两套绕组，主绕组为运行绕组。

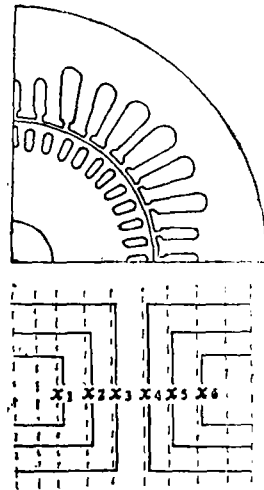


图1 电机结构及主绕组局部图

当综合设计工作气隙正弦分布磁场时，不仅要考虑绕组磁势、磁场饱和及气隙磁导分布不均匀等引起的高次谐波，还得涉及齿谐波磁场，这时的工作气隙磁场中迭加有严重的齿谐波磁场，为了使气隙总的高次谐波磁场尽可能的小，进行优化计算所得的结果见表1、表2及图2。

表1 优化前后各槽导线数的比较

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
初始方案	60	69	71	71	69	60
优化结果	65	57	82	82	57	65

从上面给出的结果来看，当涉及齿谐波引起的高次谐波磁场时，其工作气隙中的17

表2 优化前后气隙高次谐波磁密比较

方案 \ 谐波次数 / 谐波幅值	3	5	7	9	11	13
初始方案	-97.67	-82.20	262.00	333.99	-93.03	132.36
优化结果	-84.49	41.43	158.60	335.62	-27.88	93.04
比较						

方案 \ 谐波次数 / 谐波幅值	15	17	19	21	.....	2~111次 总有效值
初始方案	-94.64	-1085.63	-750.79	22.52	.....	1226.36
优化结果	-101.27	-1033.12	-755.42	13.20	.....	1102.73
比较						减小10.08%

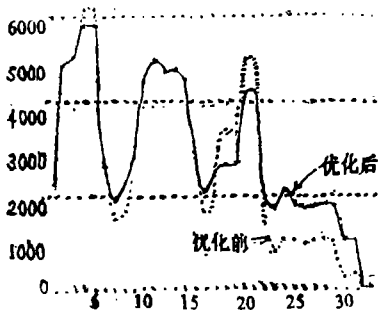


图2 优化前后气隙磁密分布曲线比较(取半极)

次谐波磁密幅值最大,这是因为外定子有36个槽(齿),四个极,所以每极下有9个槽(齿),恰对应17次谐波的频率,从而本文这种方法的计算结果很直观地体现出一阶齿谐波对气隙磁场影响较大。

## 五、结论

1. 通过对具有异形槽的单相异步电动机的分析计算,说明本文这种用有限元剖分计算的磁场精度较高,用离散快速傅里叶变换分解的各次谐波磁密非常直观,用离散规划法优化绕组每槽导线数,所得结果可直接应用,无需调整,并且只在有限的离散点上

寻优,这种算法比一般常规的连续规划算法收敛快。

2. 本文这种直接设计工作气隙正弦分布磁场的方法同样适用于其它交流电机绕组的设计。

3. 尤其当电枢铁心的齿槽数多以及每槽中导线数的可调范围比较大时,这种优化方法更能显示出其独特的优越性。

4. 在应用离散快速傅里叶变换时,为了使分解的工作气隙高次谐波磁密精确,需要有足够多的气隙磁密离散点数。

本文实例中给出的结果是以高次谐波磁密的总有效值为目标函数情况下取得的,若要同时分别抑制各高次谐波,可参阅其它文献用多目标优化方法。

## 参考文献

[1] 陈立周等. 工程离散变量优化设计方法——原理与应用. 机械工业出版社, 1989  
 [2] 陈丕章等. 电机电磁场理论与计算. 科学出版社, 1986  
 [3] 孙仲康. 快速傅里叶变换及应用. 人民邮电出版社, 1982  
 [4] M. Ito, N. Fujimoto, H. Okuda, N. Takahashi Analytical module for magnetic field analysis of induction motor performance. IEEE Trans. on PAS, No. 11, 1981.